Realne funkcije

- Osobine funkcija
- Stepena funkcija
- Eksponencijalna i logaritamska funkcija
- Trigonometrijske funkcije
- Elementarne funkcije

Osobine funkcija

Neka je f funkcija koja preslikava skup $D \subset \mathbf{R}$ (**domen** funkcije) u skup $\mathbf{R}$. To znači da za svako $x \in D$ postoji jedan i samo jedan realan broj y takav da je $y = f(x)$.

Osobine funkcija

Neka je f funkcija koja preslikava skup $D \subset \mathbf{R}$ (**domen** funkcije) u skup $\mathbf{R}$. To znači da za svako $x \in D$ postoji jedan i samo jedan realan broj y takav da je $y = f(x)$.

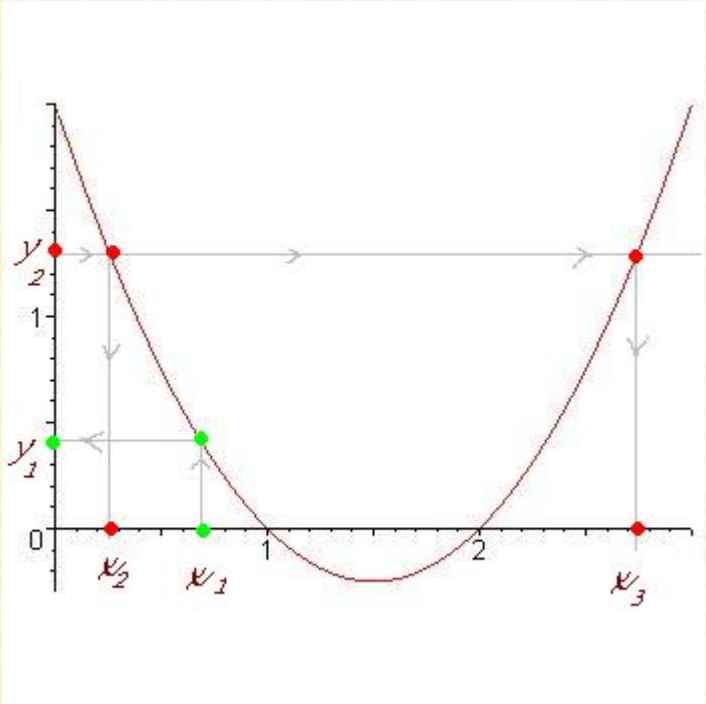
Oznaka za funkciju koja preslikava x u $f(x)$ je $x \mapsto f(x)$. Tako, na primer, funkcija $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ je funkcija koja preslikava x u $x^2 - 3x + 2$.

Osobine funkcija

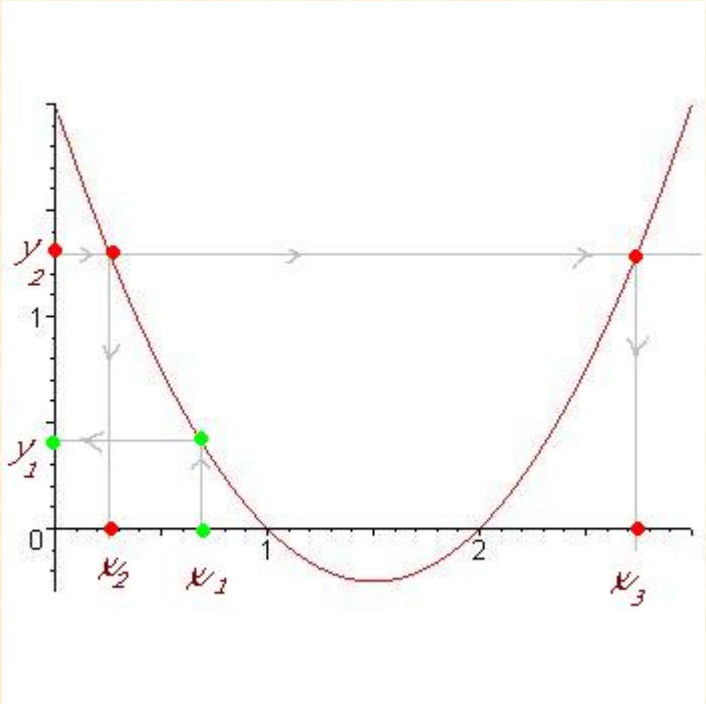
Neka je f funkcija koja preslikava skup $D \subset \mathbf{R}$ (**domen** funkcije) u skup $\mathbf{R}$. To znači da za svako $x \in D$ postoji jedan i samo jedan realan broj y takav da je $y = f(x)$.

Oznaka za funkciju koja preslikava x u $f(x)$ je $x \mapsto f(x)$. Tako, na primer, funkcija $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ je funkcija koja preslikava x u $x^2 - 3x + 2$.

Evo grafika ove funkcije:

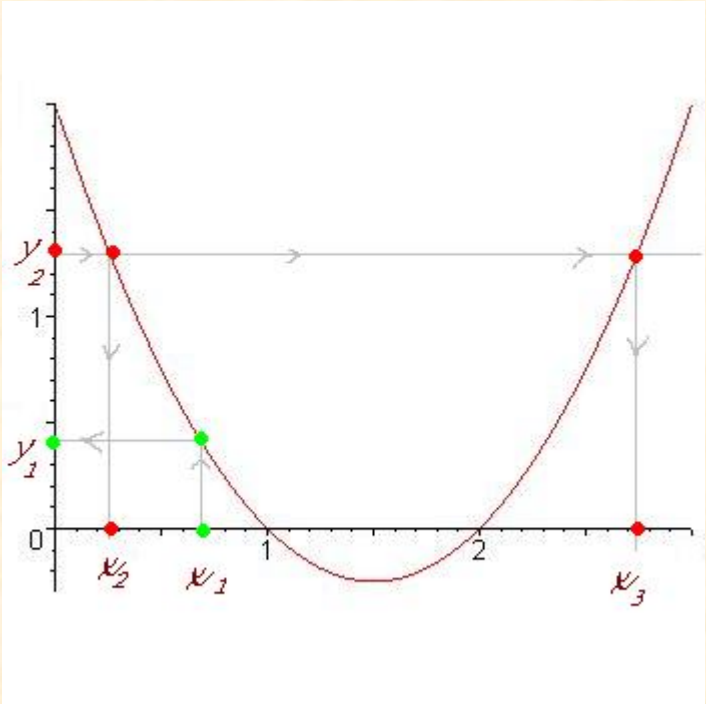


Grafik funkcije $y = f(x)$ je skup tačaka u ravni čije su koordinate $(x, f(x))$.



Grafik funkcije $y = f(x)$ je skup tačaka u ravni čije su koordinate $(x, f(x))$.

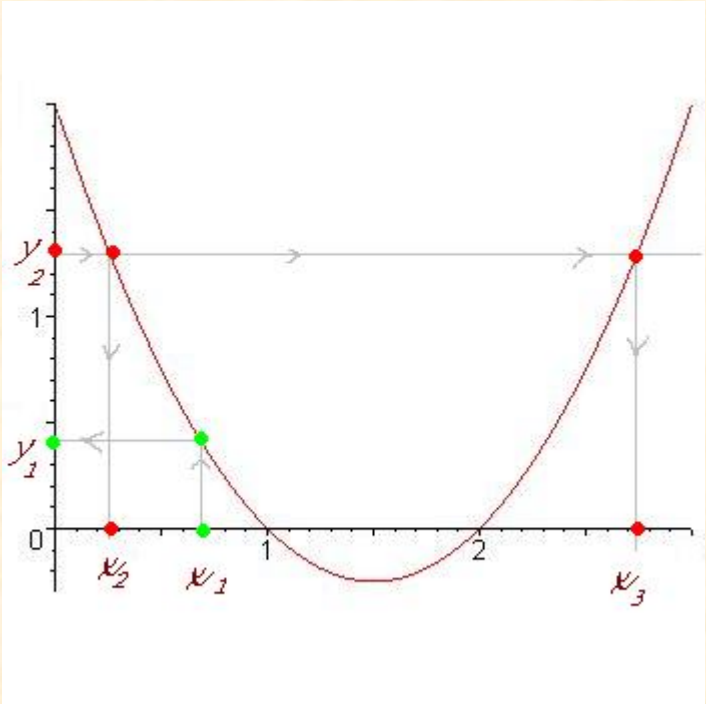
Za jedno $x = x_1$ postoji **samo jedno** $y = y_1$ takvo da je $y = f(x)$.



Grafik funkcije $y = f(x)$ je skup tačaka u ravni čije su koordinate $(x, f(x))$.

Za jedno $x = x_1$ postoji **samo jedno** $y = y_1$ takvo da je $y = f(x)$.

Za jedno $y = y_2$ **može postojati više tačaka** x takvih da je $y_2 = f(x)$. Na slici su to tačke x_2 i x_3.



Grafik funkcije $y = f(x)$ je skup tačaka u ravni čije su koordinate $(x, f(x))$.

Za jedno $x = x_1$ postoji **samo jedno** $y = y_1$ takvo da je $y = f(x)$.

Za jedno $y = y_2$ **može postojati više tačaka** x takvih da je $y_2 = f(x)$. Na slici su to tačke x_2 i x_3.

Osim "poznatih" funkcija kao što su x^2, x^3,$\sin x$ itd, u matematici postoje veoma neobične funkcije, na primer takve čiji se grafik ne može nacrtati, ili takve za koje ne postoji formula kojom bi se opisale, ili takve čiju je brojnu vrednost nemoguće tačno izračunati . . .

Jednakost funkcija

Za funkcije f i g kažemo da su jednake i pišemo $f = g$ ako imaju isti domen D i ako za svako $x \in D$ važi da je $f(x) = g(x)$.

Jednakost funkcija

Za funkcije f i g kažemo da su jednake i pišemo $f = g$ ako imaju isti domen D i ako za svako $x \in D$ važi da je $f(x) = g(x)$.

Uslov da funkcije imaju isti domen je bitan deo ove definicije.

Jednakost funkcija

Za funkcije f i g kažemo da su jednake i pišemo $f = g$ ako imaju isti domen D i ako za svako $x \in D$ važi da je $f(x) = g(x)$.

Uslov da funkcije imaju isti domen je bitan deo ove definicije.

Na primer, funkcija $x \mapsto x^2$ za $x \in [0, 1]$ nije jednaka funkciji $x \mapsto x^2$ za $x \in [-1, 1]$.

Jednakost funkcija

Za funkcije f i g kažemo da su jednake i pišemo $f = g$ ako imaju isti domen D i ako za svako $x \in D$ važi da je $f(x) = g(x)$.

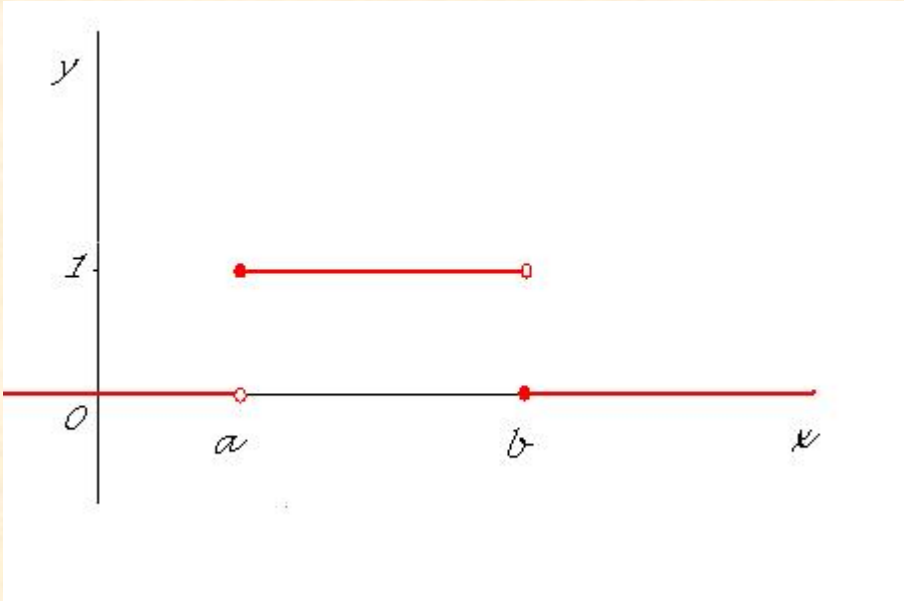
Uslov da funkcije imaju isti domen je bitan deo ove definicije.

Na primer, funkcija $x \mapsto x^2$ za $x \in [0, 1]$ nije jednaka funkciji $x \mapsto x^2$ za $x \in [-1, 1]$.

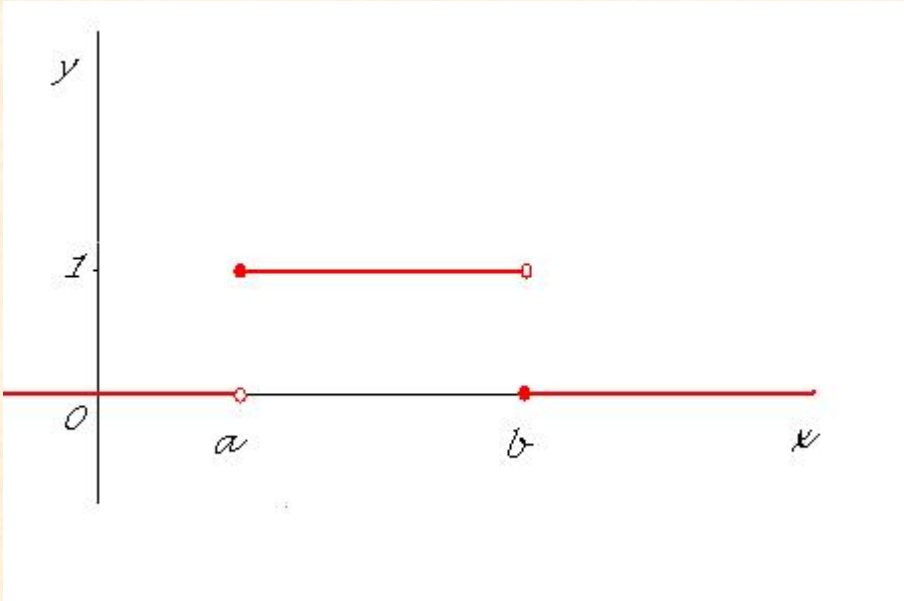
Obično se kod „poznatih" realnih funkcija ne precizira domen; u tom slučaju smatramo da je funkcija zadata na najširem mogućem domenu. Na primer, ako govorimo o funkciji $x \mapsto x^2$ i ako nije preciziran domen, usvajamo da je to ceo skup $\mathbf{R}$, dok je domen funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$ skup nenegativnih realnih brojeva.

Naizgled najjednostavnija funkcija je **indikator** skupa A, gde je $A \subset \mathbf{R}$ neki zadati skup. Ova funkcija se obeležava sa $I_A(x)$ i definiše se da uzima vrednost 1 ako $x \in A$ i vrednost 0 ako $x \neq A$.

Naizgled najjednostavnija funkcija je **indikator** skupa A, gde je $A \subset \mathbf{R}$ neki zadati skup. Ova funkcija se obeležava sa $I_A(x)$ i definiše se da uzima vrednost 1 ako $x \in A$ i vrednost 0 ako $x \neq A$.

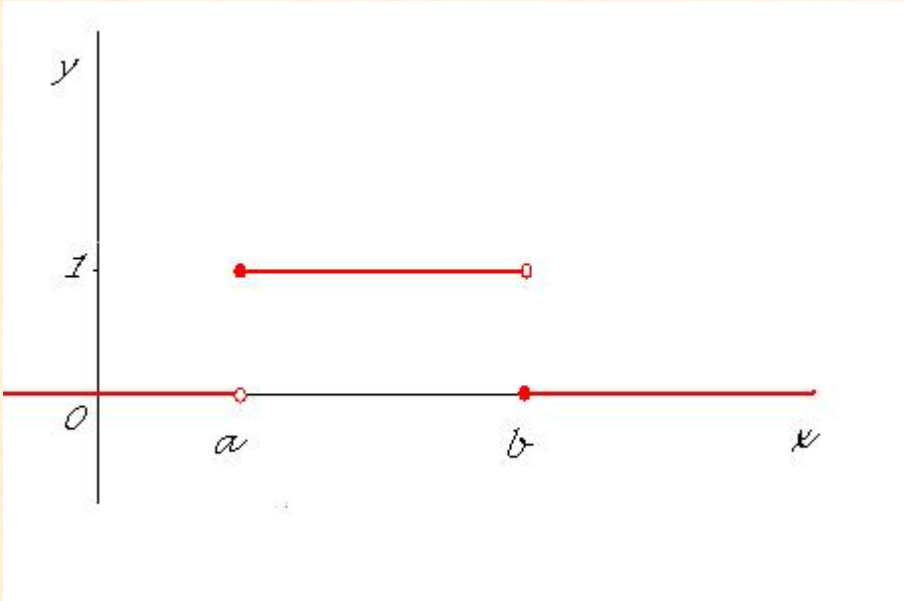


Naizgled najjednostavnija funkcija je **indikator** skupa A, gde je $A \subset \mathbf{R}$ neki zadati skup. Ova funkcija se obeležava sa $I_A(x)$ i definiše se da uzima vrednost 1 ako $x \in A$ i vrednost 0 ako $x \neq A$.



Na slici je predstavljen grafik indikatora intervala $[a, b)$, $x \mapsto I_{[a,b)}(x)$.

Naizgled najjednostavnija funkcija je **indikator** skupa A, gde je $A \subset \mathbf{R}$ neki zadati skup. Ova funkcija se obeležava sa $I_A(x)$ i definiše se da uzima vrednost 1 ako $x \in A$ i vrednost 0 ako $x \neq A$.



Na slici je predstavljen grafik indikatora intervala $[a, b)$, $x \mapsto I_{[a,b)}(x)$.
Obratite pažnju na pune i prazne tačke na grafiku!

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ dati intervali, gde je $n \in \mathbf{N}$. Ako je funkcija f definisana na skupu $D = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ sa

$$f(x) = g_i(x) \quad \text{za } x \in A_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tada kažemo da je funkcija f **deo po deo jednaka** funkcijama $g_1, \ldots, g_n$.

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ dati intervali, gde je $n \in \mathbf{N}$. Ako je funkcija f definisana na skupu $D = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ sa

$$f(x) = g_i(x) \quad \text{za } x \in A_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tada kažemo da je funkcija f **deo po deo jednaka** funkcijama $g_1, \ldots, g_n$.

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0; \\ 2^{x+1}, & 0 < x < 2; \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ dati intervali, gde je $n \in \mathbf{N}$. Ako je funkcija f definisana na skupu $D = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ sa

$$f(x) = g_i(x) \quad \text{za } x \in A_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tada kažemo da je funkcija f **deo po deo jednaka** funkcijama $g_1, \ldots, g_n$.

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0; \\ 2^{x+1}, & 0 < x < 2; \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Jednostavniji zapis, u obliku jedne formule, moguć je ako koristimo indikatore:

$$f(x) = (x+2)I_{(-\infty,0]}(x) + 2^{x+1}I_{(0,2)}(x) + x^3 I_{[2,+\infty)}(x)$$

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ dati intervali, gde je $n \in \mathbf{N}$. Ako je funkcija f definisana na skupu $D = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ sa

$$f(x) = g_i(x) \quad \text{za } x \in A_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

tada kažemo da je funkcija f **deo po deo jednaka** funkcijama $g_1, \ldots, g_n$.

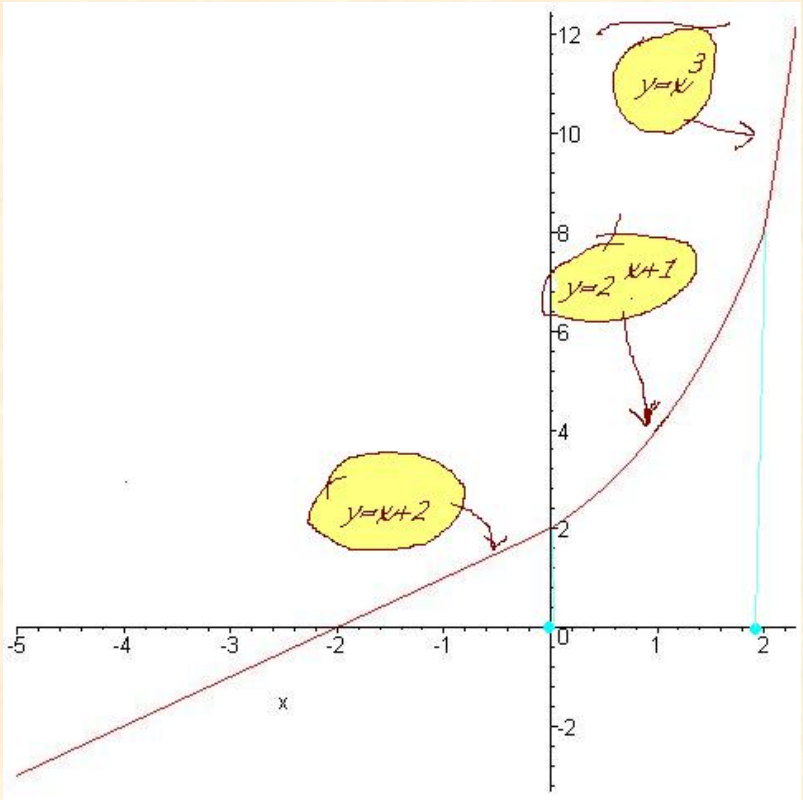
Primer:

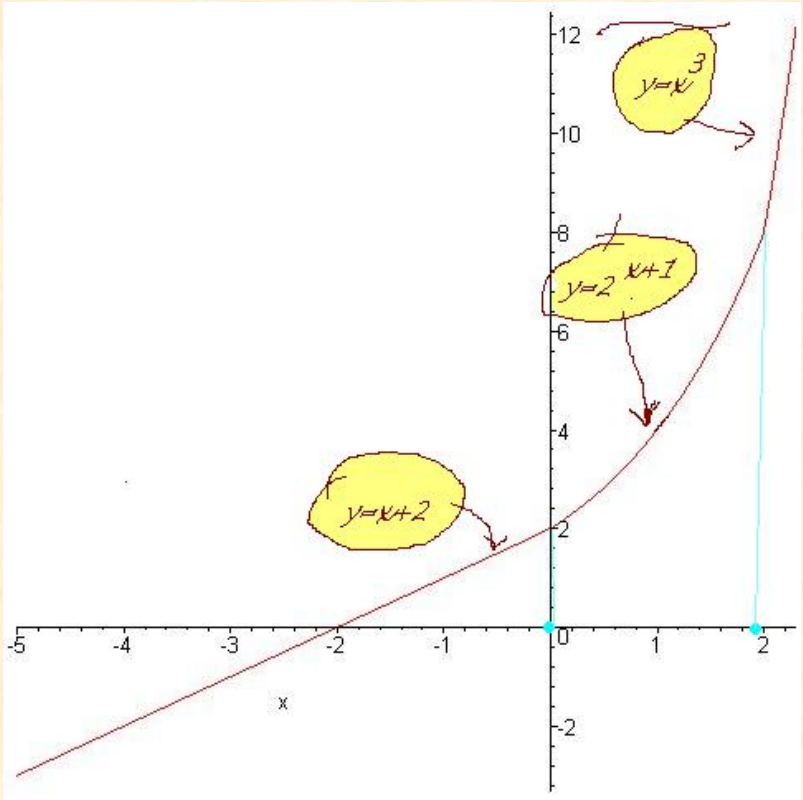
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0; \\ 2^{x+1}, & 0 < x < 2; \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Jednostavniji zapis, u obliku jedne formule, moguć je ako koristimo indikatore:

$$f(x) = (x+2)I_{(-\infty,0]}(x) + 2^{x+1}I_{(0,2)}(x) + x^3 I_{[2,+\infty)}(x)$$

Evo grafika ove funkcije:


y=x^3
y=2^(x+1)
y=x+2
12
10
8
6
4
2
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
x



Vrednosti na krajevima susednih intervala su iste, zato ovaj grafik nema prekida, za razliku od prethodnog grafika indikatora.

Ako je funkcija f definisana na skupu A i ako je $B \subset A$, tada za funkciju g koja je definisana na skupu B pomoću jednakosti $g(x) = f(x)$ kažemo da je dobijena od funkcije f **restrikcijom domena**.

Ako je funkcija f definisana na skupu A i ako je $B \subset A$, tada za funkciju g koja je definisana na skupu B pomoću jednakosti $g(x) = f(x)$ kažemo da je dobijena od funkcije f **restrikcijom domena**.

Na primer, funkcija $x \mapsto x^2$, $x > 0$ je dobijena od funkcije $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbf{R}$, restrikcijom domena. Ovo nije samo formalnost, ove dve funkcije se suštinski razlikuju, videćemo kasnije.

Ako je funkcija f definisana na skupu A i ako je $B \subset A$, tada za funkciju g koja je definisana na skupu B pomoću jednakosti $g(x) = f(x)$ kažemo da je dobijena od funkcije f **restrikcijom domena**.

Na primer, funkcija $x \mapsto x^2$, $x > 0$ je dobijena od funkcije $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbf{R}$, restrikcijom domena. Ovo nije samo formalnost, ove dve funkcije se suštinski razlikuju, videćemo kasnije.

Ako je funkcija g definisana na skupu A i ako je funkcija f definisana na skupu $g(A)$, tada se na skupu A može definisati funkcija h pomoću jednakosti $h(x) = f(g(x))$. Za funkciju h kažemo da je **kompozicija funkcija** f i g, u oznaci $f \circ g$. Na primer, kompozicija funkcija $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto x^2$ je funkcija $x \mapsto \sin x^2$ i njen domen je skup $\mathbf{R}$.

Ako postoji realan broj $T \neq 0$, takav da je

$$f(x+T) = f(x), \qquad \text{za svako } x \in D,$$

kažemo da je f **periodična funkcija**, a broj T nazivamo **periodom funkcije** f. Ako je f periodična sa periodom T, tada je očigledno i kT period funkcije f, gde je k proizvoljan ceo broj različit od nule.

Ako postoji realan broj $T \neq 0$, takav da je

$$f(x+T) = f(x), \qquad \text{za svako } x \in D,$$

kažemo da je f **periodična funkcija**, a broj T nazivamo **periodom funkcije** f. Ako je f periodična sa periodom T, tada je očigledno i kT period funkcije f, gde je k proizvoljan ceo broj različit od nule.

Primeri periodičnih funkcija:

- Funkcije $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ su periodične sa periodom 2π;

Ako postoji realan broj $T \neq 0$, takav da je

$$f(x+T) = f(x), \qquad \text{za svako } x \in D,$$

kažemo da je f **periodična funkcija**, a broj T nazivamo **periodom funkcije** f. Ako je f periodična sa periodom T, tada je očigledno i kT period funkcije f, gde je k proizvoljan ceo broj različit od nule.

Primeri periodičnih funkcija:

- Funkcije $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ su periodične sa periodom 2π;
- Funkcija $x \mapsto x - [x]$ je periodična sa periodom 1.

Šta je $[x]$?

Ako postoji realan broj $T \neq 0$, takav da je

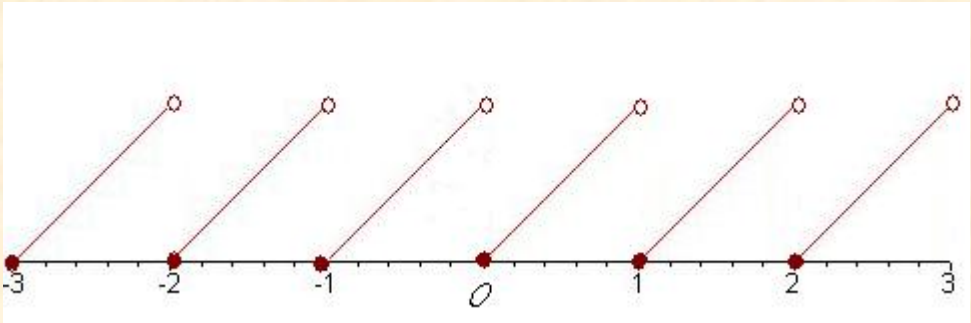
$$f(x+T) = f(x), \qquad \text{za svako } x \in D,$$

kažemo da je f **periodična funkcija**, a broj T nazivamo **periodom funkcije** f. Ako je f periodična sa periodom T, tada je očigledno i kT period funkcije f, gde je k proizvoljan ceo broj različit od nule.

Primeri periodičnih funkcija:

- Funkcije $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ su periodične sa periodom 2π;
- Funkcija $x \mapsto x - [x]$ je periodična sa periodom 1.

Šta je $[x]$?



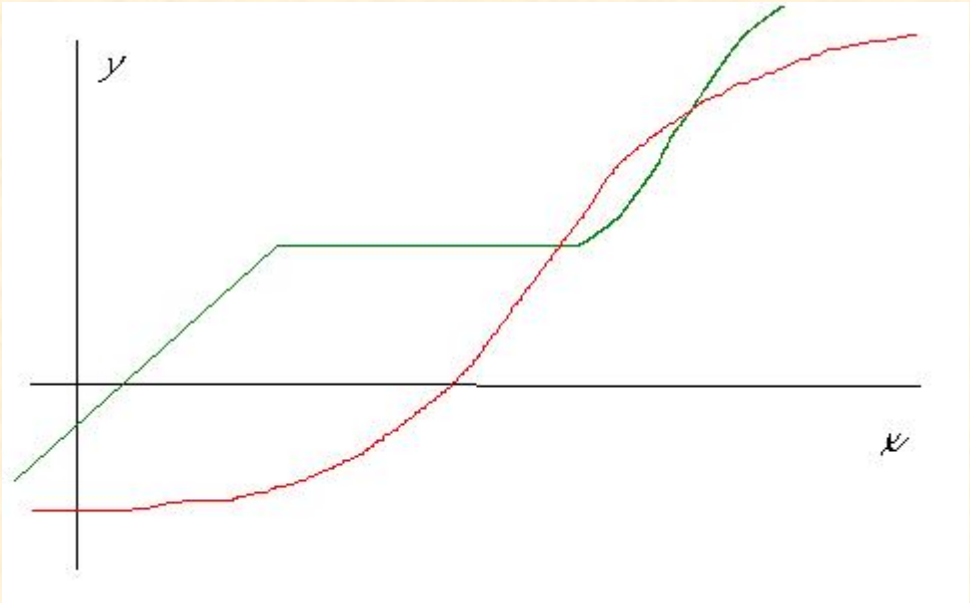
Ako za svako $x, y \in A \subset D$ važi

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

kažemo da je funkcija f **monotono neopadajuća** na skupu A. Ako je $f(x) < f(y)$ kad god je $x < y$, kažemo da je f **monotono rastuća** funkcija. Analogno se definišu pojmovi **monotono nerastuća** i **monotono opadajuća** funkcija na određenom skupu A. Za monotono rastuće i monotono opadajuće funkcije kažemo da su **strogo monotone**.

Grafik monotono neopadajuće i monotono rastuće funkcije:

Grafik monotono neopadajuće i monotono rastuće funkcije:



Neka je f funkcija definisana na skupu A. Kažemo da je f **bijekcija** ili **bijektivno preslikavanje** skupa A na skup B ako je $f(A) = B$ i ako se različiti elementi iz A preslikavaju u različite elemente iz B, tj. ako važi

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

Preslikavanje je "NA"

$\wedge$

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Preslikavanje je "1-1"

Bijektivno preslikavanje naziva se i **uzajamno jednoznačnim preslikavanjem** skupa A na skup B. Naime, kod ovakvog preslikavanja svakom $y \in B$ odgovara jedan i samo jedan element x iz A takav da je $y = f(x)$. Prema tome, može se definisati inverzno preslikavanje ili **inverzna funkcija** f^{-1} koja preslikava skup $B = f(A)$ na skup A i definisana je sa

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) \qquad (x \in B,\ y \in A).$$

Ako je funkcija strogo monotona na skupu A, onda je ona bijekcija skupa A na skup $B = f(A)$. Ovo tvrđenje je lako dokazati polazeći od definicije bijekcije: treba dokazati samo da se različiti elementi iz A preslikavaju u različite elemente iz $f(A)$, što sleduje iz stroge monotonosti. Na primer, ako je f monotono rastuća funkcija na skupu A, onda je $f(x) < f(y)$ kad god je $x < y$. Prema tome, za svaku funkciju f koja je strogo monotona na skupu A, može se definisati inverzna funkcija f^{-1} koja preslikava $f(A)$ u A.

Primeri:

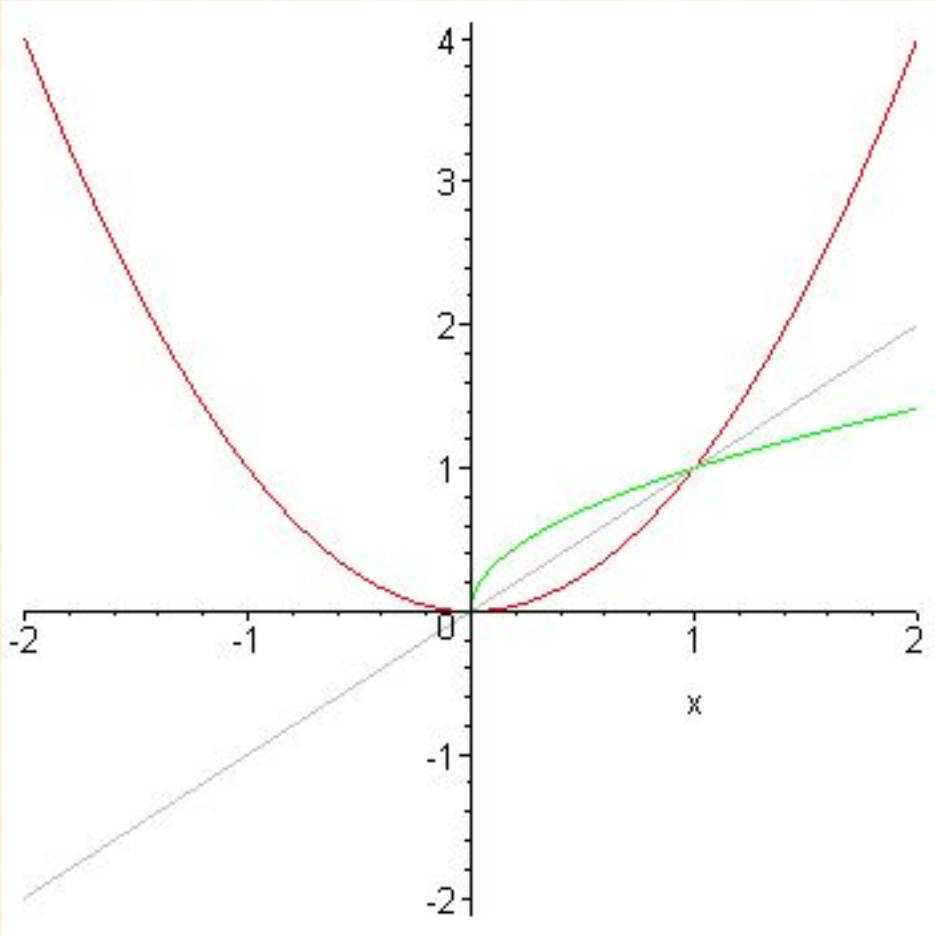
- Funkcija $x \mapsto x^3$ je monotono rastuća. Njena inverzna funkcija je $y = \sqrt[3]{x}$, što se dobija rešavanjem jednačine $y^3 = x$ po y.

Primeri:

- Funkcija $x \mapsto x^3$ je monotono rastuća. Njena inverzna funkcija je $y = \sqrt[3]{x}$, što se dobija rešavanjem jednačine $y^3 = x$ po y.
- Funkcija $x \mapsto x^2$ nije monotona na svom prirodnom domenu $\mathbf{R}$.Za jedno x dobijaju se dva rešenja jednačine $y^2 = x$, i zato ova funkcija nema inverznu.

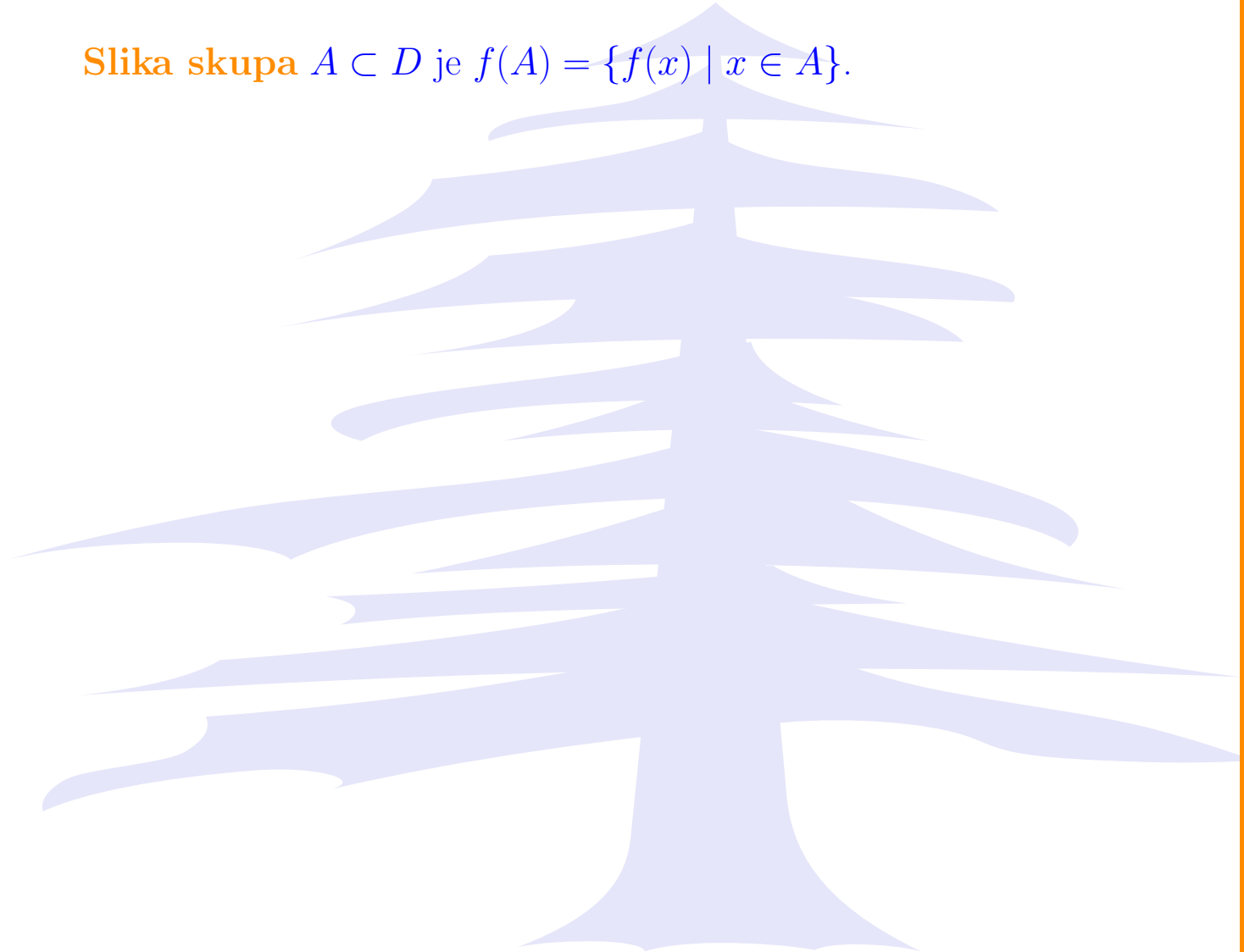
Primeri:

- Funkcija $x \mapsto x^3$ je monotono rastuća. Njena inverzna funkcija je $y = \sqrt[3]{x}$, što se dobija rešavanjem jednačine $y^3 = x$ po y.
- Funkcija $x \mapsto x^2$ nije monotona na svom prirodnom domenu $\mathbf{R}$.Za jedno x dobijaju se dva rešenja jednačine $y^2 = x$, i zato ova funkcija nema inverznu.
- Ali, možemo da posmatramo funkciju koja se od ove dobija **restrikcijom domena**: $x \mapsto x^2$, $x > 0$. Ova funkcija jeste monotona, i njena inverzna funkcija je $x \mapsto \sqrt{x}$.



Grafici funkcije i njoj inverzne su simetrični u odnosu na pravu $y = x$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.



Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$ $[-2, 2]$;

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}([-4, 4]) =$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}([-4, 4]) =$ $[-2, 2]$;

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}([-4, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}((-4, 0)) =$

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}([-4, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}((-4, 0)) =$ $\emptyset$;

Slika skupa $A \subset D$ je $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Inverzna slika skupa $B \subset \mathbf{R}$ je skup svih onih $x \in D$ koji se funkcijom f preslikavaju u B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}.$$

Primer: Neka je $f(x) = x^2$, sa domenom $\mathbf{R}$. Tada je

- $f([-2, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f([0, 2]) =$ $[0, 4]$;
- $f^{-1}([0, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}([-4, 4]) =$ $[-2, 2]$;
- $f^{-1}((-4, 0)) =$ $\emptyset$;

Pažnja:Inverzna slika skupa **uvek postoji** (mada može biti prazan skup). Inverzna funkcija **ne mora da postoji**.

Ako je domen D funkcije f simetričan (tj. ako zajedno sa svakom svojom tačkom x sadrži i tačku $-x$) i ako za svako $x \in D$ važi da je $f(-x) = f(x)$, za funkciju kažemo da je **parna**, a ako za svako $x \in D$ važi $f(-x) = -f(x)$, funkcija je **neparna**. Naravno, funkcija ne mora biti ni parna ni neparna, a jedina funkcija koja je istovremeno i parna i neparna je funkcija $f(x) \equiv 0$ za $x \in D$.

Za funkciju f kažemo da je **ograničena** na skupu A ako je skup $f(A)$ ograničen, tj. ako postoje realni brojevi a i b takvi da je $a < f(x) < b$ za svako $x \in A$. Ekvivalentno, funkcija f je ograničena na skupu A ako postoji pozitivan realan broj M takav da je $|f(x)| < M$ za svako $x \in A$.

Funkcija koja preslikava x u y može biti zadata u **eksplicitnom obliku** $y = f(x)$, **implicitnom obliku** $F(x, y) = 0$ ili u **parametarskom obliku** $x = g(t), y = h(t)$. Na primer, jednačina gornje polovine kružnice poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku je $y = \sqrt{1 - x^2}$ u eksplicitnom obliku. Implicitan oblik ove jednačine je $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$, a parametarski oblik je $x = \cos t, y = \sin t,\ t \in [0, \pi]$.

Funkcija koja preslikava x u y može biti zadata u **eksplicitnom obliku** $y = f(x)$, **implicitnom obliku** $F(x, y) = 0$ ili u **parametarskom obliku** $x = g(t), y = h(t)$. Na primer, jednačina gornje polovine kružnice poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku je $y = \sqrt{1 - x^2}$ u eksplicitnom obliku. Implicitan oblik ove jednačine je $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$, a parametarski oblik je $x = \cos t, y = \sin t,\ t \in [0, \pi]$.

Parametarski i implicitni oblik su pogodni za predstavljanje krivih u ravni i u prostoru.

Parametarski i implicitni oblik su pogodni za predstavljanje krivih u ravni i u prostoru.

Primer: Jednačina

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

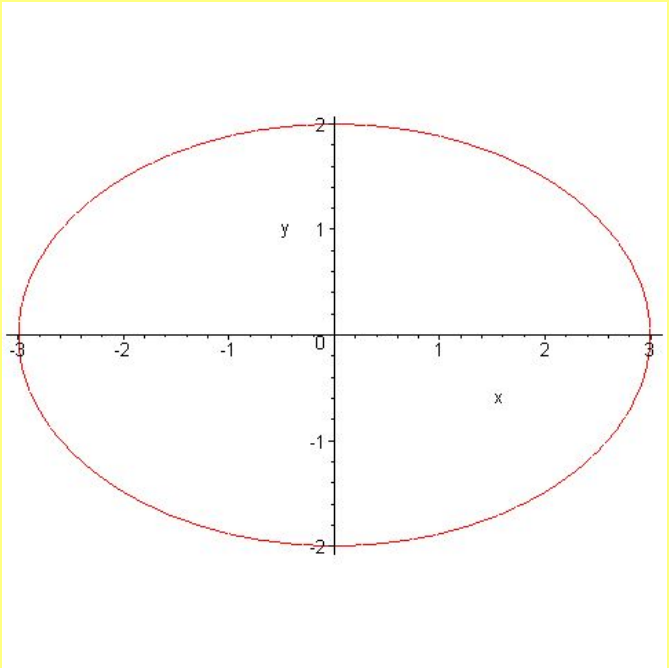
određuje **elipsu**:

Parametarski i implicitni oblik su pogodni za predstavljanje krivih u ravni i u prostoru.

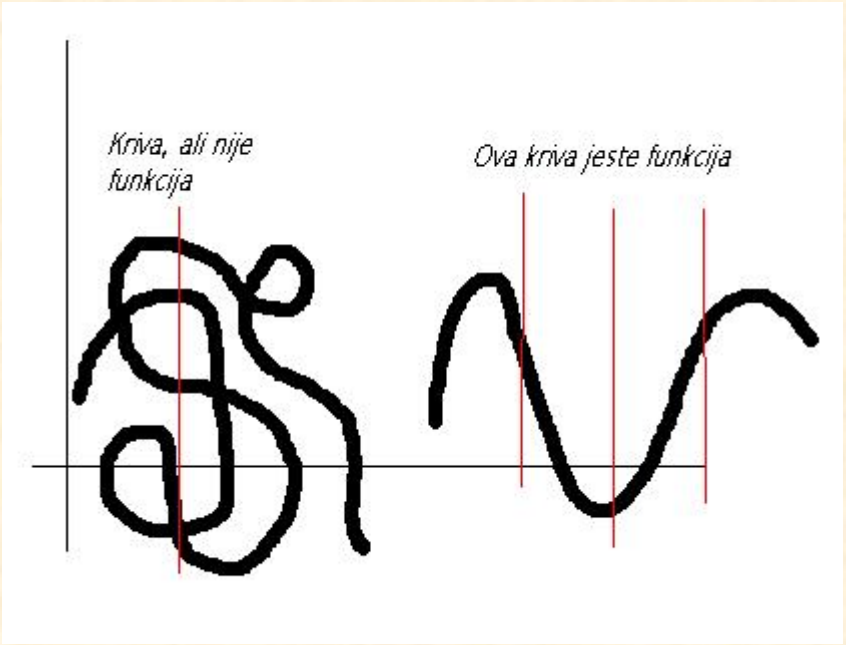
Primer: Jednačina

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

određuje **elipsu**:



Razlika između krive i funkcije:



Jednoj vrednosti za x može da odgovara najviše jedna vrednost za y, tako da je tačka (x, y) na grafiku funkcije.

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,
- $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbf{N}, \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0.$

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,
- $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbf{N}, \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0.$

Dalje:

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,
- $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbf{N}, \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0.$

Dalje:

- Koren

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,
- $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbf{N}, \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0.$

Dalje:

- Koren
- Stepen sa racionalnim izložiocem

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,
- $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbf{N}, \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0.$

Dalje:

- Koren
- Stepen sa racionalnim izložiocem

Primer: $2^{3/4} = (2^3)^{1/4} = 8^{1/4}$ je broj koji kada se stepenuje na četvrti stepen daje 8.

Stepena funkcija

Ceo stepen:

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbf{R}.$
- $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \qquad$ za svako $x \in \mathbf{R}$,
- $x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}, \qquad n \in \mathbf{N}, \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0.$

Dalje:

- Koren
- Stepen sa racionalnim izložiocem

Primer: $2^{3/4} = (2^3)^{1/4} = 8^{1/4}$ je broj koji kada se stepenuje na četvrti stepen daje 8.

Šta je 2^{π} ????

Šta je 2^{π} ????

Postepeno:

- $2^{3.14} = 2^{\frac{157}{50}} = (2^{157})^{1/50}$

Šta je 2^{π} ????

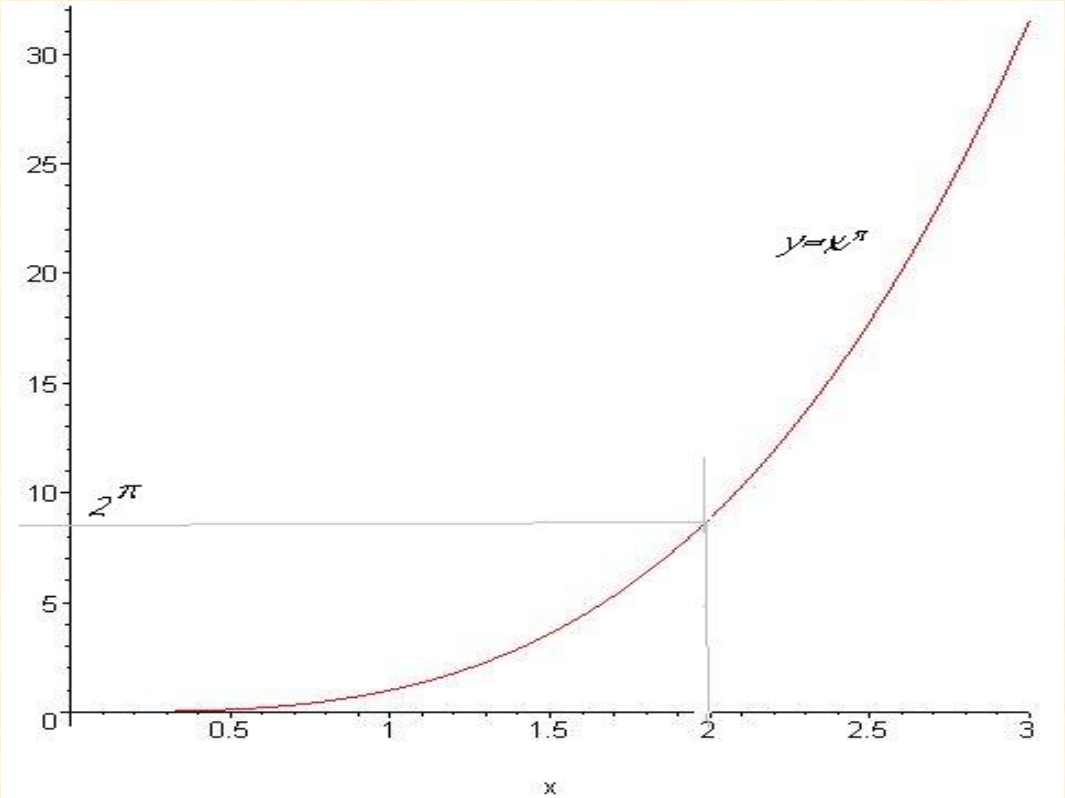
Postepeno:

- $2^{3.14} = 2^{\frac{157}{50}} = (2^{157})^{1/50}$
- $2^{3.14159} = 2^{\frac{314159}{100000}} = \ldots$

Šta je 2^{π} ????

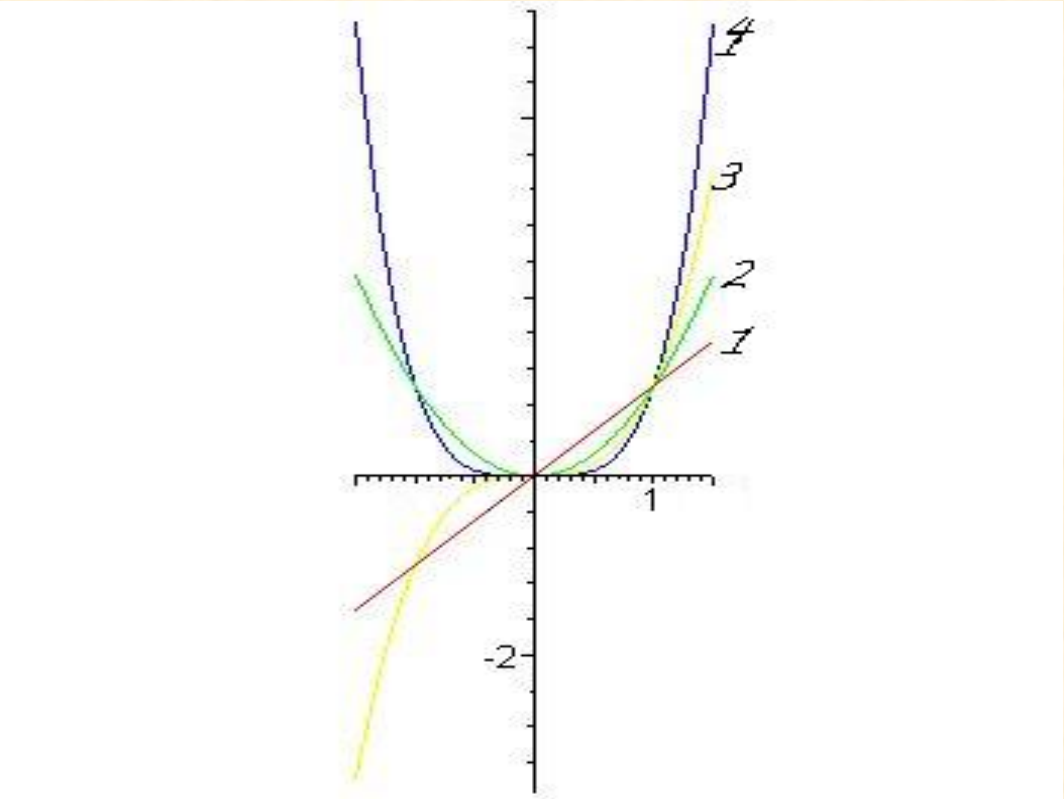
Postepeno:

- $2^{3.14} = 2^{\frac{157}{50}} = (2^{157})^{1/50}$
- $2^{3.14159} = 2^{\frac{314159}{100000}} = \ldots$


30
25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x
$y=x^{\pi}$
2^{π}

Grafici stepene funkcije $x \mapsto x^a$, za $a = 1, 2, 3, 4$.

Grafici stepene funkcije $x \mapsto x^a$, za $a = 1, 2, 3, 4$.



Obratite pažnju: Ako je $|x| < 1$, onda $|x|^a$ opada kad a raste.

Polinomi

Funkcija P data sa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

zove se polinom stepena n.

Polinomi

Funkcija P data sa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

zove se polinom stepena n.

- Faktorizacija: $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$, gde su z_i realni ili **kompleksni brojevi**

Polinomi

Funkcija P data sa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

zove se polinom stepena n.

- Faktorizacija: $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$, gde su z_i realni ili **kompleksni brojevi**
- Nule:proste, višestruke

Polinomi

Funkcija P data sa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

zove se polinom stepena n.

- Faktorizacija: $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$, gde su z_i realni ili **kompleksni brojevi**
- Nule:proste, višestruke
- Svaki polinom stepena n ima tačno n **realnih ili kompleksnih nula**

Polinomi

Funkcija P data sa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

zove se polinom stepena n.

- Faktorizacija: $P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$, gde su z_i realni ili **kompleksni brojevi**
- Nule:proste, višestruke
- Svaki polinom stepena n ima tačno n **realnih ili kompleksnih nula**

Racionalne funkcije

Količnik dva polinoma nazivamo **racionalnom funkcijom**:

Racionalne funkcije

Količnik dva polinoma nazivamo **racionalnom funkcijom**:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

gde je $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, a $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ova funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ osim u nulama polinoma Q_n.

Racionalne funkcije

Količnik dva polinoma nazivamo **racionalnom funkcijom**:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

gde je $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, a $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ova funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ osim u nulama polinoma Q_n.

- Prava, neprava

Racionalne funkcije

Količnik dva polinoma nazivamo **racionalnom funkcijom**:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

gde je $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, a $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ova funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ osim u nulama polinoma Q_n.

- Prava, neprava
- Svodljiva, nesvodljiva

Racionalne funkcije

Količnik dva polinoma nazivamo **racionalnom funkcijom**:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

gde je $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, a $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ova funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ osim u nulama polinoma Q_n.

- Prava, neprava
- Svodljiva, nesvodljiva
- Parcijalni razlomci:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (p^2 - 4q < 0),\ k \in \mathbf{N}$$

Parcijalni razlomci su gradivni elementi za ostale racionalne funkcije.

Racionalne funkcije

Količnik dva polinoma nazivamo **racionalnom funkcijom**:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

gde je $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, a $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Ova funkcija je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$ osim u nulama polinoma Q_n.

- Prava, neprava
- Svodljiva, nesvodljiva
- Parcijalni razlomci:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (p^2 - 4q < 0),\ k \in \mathbf{N}$$

Parcijalni razlomci su gradivni elementi za ostale racionalne funkcije.

Primer: $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}.$

Svaka prava i nesvodljiva racionalna funkcija može se na jedinstven način razložiti na zbir parcijalnih razlomaka. Ako je

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

prava i nesvodljiva racionalna funkcija i ako polinom Q ima faktorizaciju

$$Q_n(x) = b_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_mx+q_l)^{s_l},$$

onda postoje i jedinstveno su određeni koeficijenti A_{ij}, M_{ij} i N_{ij} u razlaganju

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{M_{ij}x+N_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

Ova jednakost važi za svako x za koje je racionalna funkcija f definisana.

Primer: Neka je

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

Primer: Neka je

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

- Deljenjem dobijamo

$$f(x) = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}\ .$$

Primer: Neka je

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

- Deljenjem dobijamo

$$f(x) = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}\ .$$

- Razlaganje:

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Primer: Neka je

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

- Deljenjem dobijamo

$$f(x) = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}\ .$$

- Razlaganje:

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

- Metoda neodređenih koeficijenata

Primer: Neka je

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

- Deljenjem dobijamo

$$f(x) = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}\ .$$

- Razlaganje:

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

- Metoda neodređenih koeficijenata
- Metoda zamene vrednosti

Primer: Neka je

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

- Deljenjem dobijamo

$$f(x) = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}\ .$$

- Razlaganje:

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

- Metoda neodređenih koeficijenata
- Metoda zamene vrednosti
-

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}$$

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Ako je $b > 0$, eksponencijalna funkcija je preslikavanje $x \mapsto b^x$ i definisano je za svako $x \in \mathbf{R}$. Broj b naziva se **osnovom** eksponencijalne funkcije.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Ako je $b > 0$, eksponencijalna funkcija je preslikavanje $x \mapsto b^x$ i definisano je za svako $x \in \mathbf{R}$. Broj b naziva se **osnovom** eksponencijalne funkcije.

- Šta ustvari znači $\pi^{\sqrt{3}}$?

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Ako je $b > 0$, eksponencijalna funkcija je preslikavanje $x \mapsto b^x$ i definisano je za svako $x \in \mathbf{R}$. Broj b naziva se **osnovom** eksponencijalne funkcije.

- Šta ustvari znači $\pi^{\sqrt{3}}$?
- Racionalne aproksimacije: $\pi \approx 3.141593$, $\sqrt{3} \approx 1.732051$, dakle $\pi^{\sqrt{3}} \approx 3.141593^{1.732051}$.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Ako je $b > 0$, eksponencijalna funkcija je preslikavanje $x \mapsto b^x$ i definisano je za svako $x \in \mathbf{R}$. Broj b naziva se **osnovom** eksponencijalne funkcije.

- Šta ustvari znači $\pi^{\sqrt{3}}$?
- Racionalne aproksimacije: $\pi \approx 3.141593$, $\sqrt{3} \approx 1.732051$, dakle $\pi^{\sqrt{3}} \approx 3.141593^{1.732051}$.
- Preciznije: Neka je x_n niz racionalnih aproksimacija za π, gde je, na primer, x_n broj π izračunat na n cifara. Neka je y_n to isto za $\sqrt{3}$. Tada je $x_n^{y_n}$ jedan niz racionalnih aproksimacija za broj $z = \pi^{\sqrt{3}}$, i na taj način možemo naći broj z sa proizvoljnom tačnošću **ali nikada potpuno tačno!**

- Posebno važna osnova $e = 2.71828\ldots$ -prirodna osnova.

- Posebno važna osnova $e = 2.71828\ldots$ -prirodna osnova.
- Broj e se prirodno pojavljuje u matematici (detalji slede kasnije)

- Posebno važna osnova $e = 2.71828\ldots$ -prirodna osnova.
- Broj e se prirodno pojavljuje u matematici (detalji slede kasnije)
- Eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ koristi se u biologiji, fizici, finansijskoj matematici, epidemiologiji, itd.

- Posebno važna osnova $e = 2.71828\ldots$ -prirodna osnova.
- Broj e se prirodno pojavljuje u matematici (detalji slede kasnije)
- Eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ koristi se u biologiji, fizici, finansijskoj matematici, epidemiologiji, itd.
- Euler-ova formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ omogućava proširenje domena eksponencijalne funkcije na skup kompleksnih brojeva:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Posebno važna osnova $e = 2.71828\ldots$ -prirodna osnova.
- Broj e se prirodno pojavljuje u matematici (detalji slede kasnije)
- Eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ koristi se u biologiji, fizici, finansijskoj matematici, epidemiologiji, itd.
- Euler-ova formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ omogućava proširenje domena eksponencijalne funkcije na skup kompleksnih brojeva:

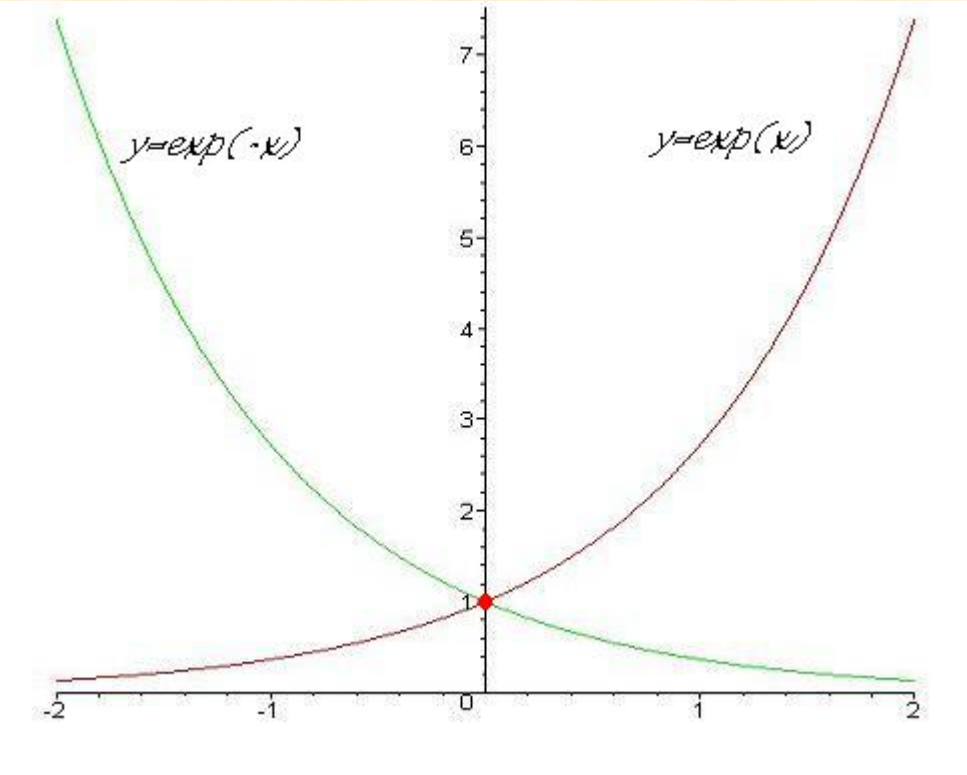
$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Broj e je jedan od pet najvažnijih brojeva u matematici: to su $0, 1, i, \pi, e$. Prema Eulerovoj formuli, postoji veza između četiri od ovih brojeva: $e^{i\pi} = 1$!

- Posebno važna osnova $e = 2.71828\ldots$ -prirodna osnova.
- Broj e se prirodno pojavljuje u matematici (detalji slede kasnije)
- Eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ koristi se u biologiji, fizici, finansijskoj matematici, epidemiologiji, itd.
- Euler-ova formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ omogućava proširenje domena eksponencijalne funkcije na skup kompleksnih brojeva:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- Broj e je jedan od pet najvažnijih brojeva u matematici: to su $0, 1, i, \pi, e$. Prema Eulerovoj formuli, postoji veza između četiri od ovih brojeva: $e^{i\pi} = 1$!
- Brojevi kao što su $5, 10, 100$, itd. nisu važni u matematici.


y=exp(-x)
y=exp(x)
7
6
5
4
3
2
1
0
-2
-1
1
2

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

- $\log_5 25 = 2$, jer je $5^2 = 25$;

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

- $\log_5 25 = 2$, jer je $5^2 = 25$;
- $\log_2 64 = 6$, jer je $2^6 = 64$;

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

- $\log_5 25 = 2$, jer je $5^2 = 25$;
- $\log_2 64 = 6$, jer je $2^6 = 64$;
- $\log_4 2 = -1/2$, jer je $4^{-1/2} = 2$;

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

- $\log_5 25 = 2$, jer je $5^2 = 25$;
- $\log_2 64 = 6$, jer je $2^6 = 64$;
- $\log_4 2 = -1/2$, jer je $4^{-1/2} = 2$;
- $\log_{1/3} 9 = -2$, jer je $(1/3)^{-2} = 9$;

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

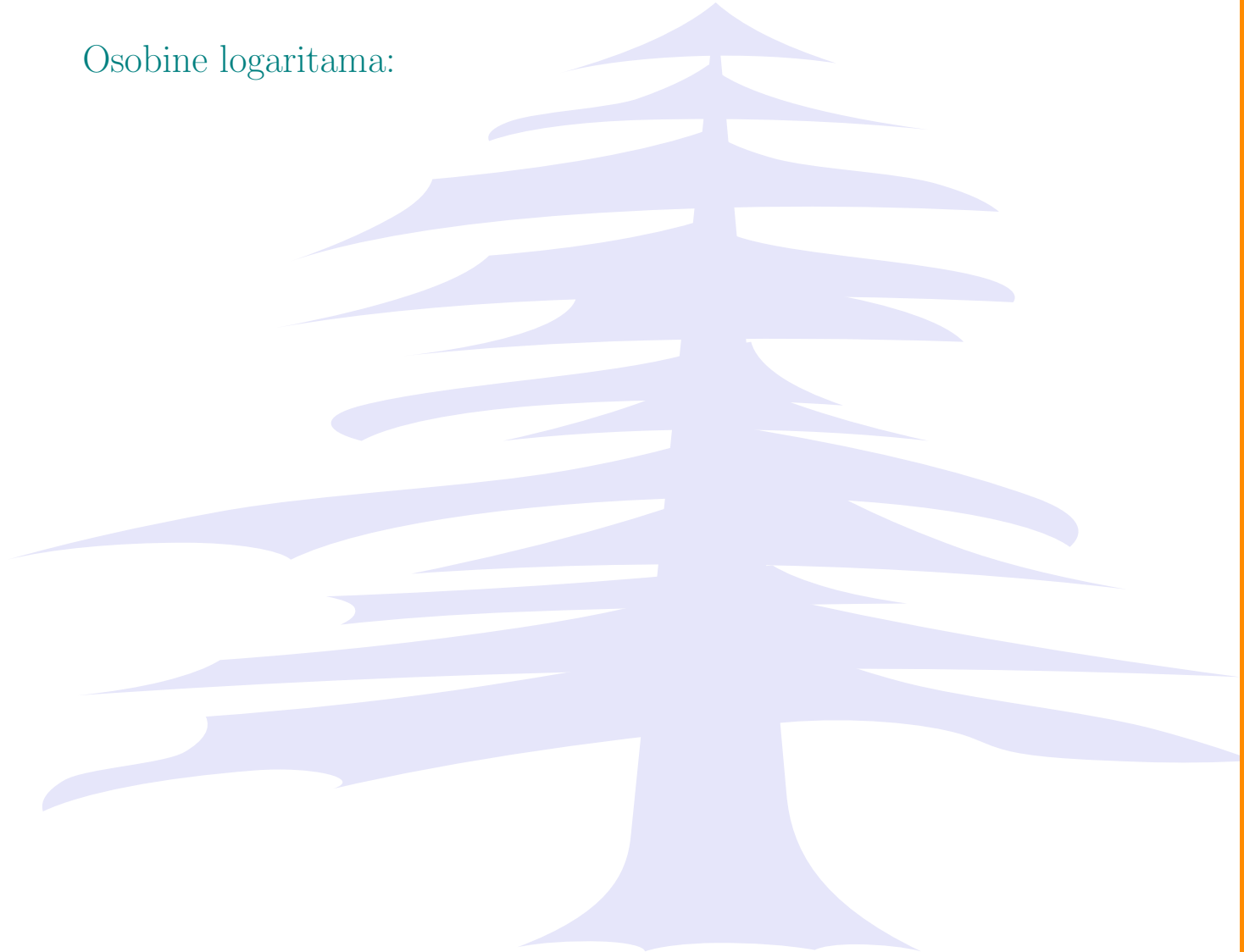
- $\log_5 25 = 2$, jer je $5^2 = 25$;
- $\log_2 64 = 6$, jer je $2^6 = 64$;
- $\log_4 2 = -1/2$, jer je $4^{-1/2} = 2$;
- $\log_{1/3} 9 = -2$, jer je $(1/3)^{-2} = 9$;
- $\log_1 x$ nije definisan izraz;

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

- $\log_5 25 = 2$, jer je $5^2 = 25$;
- $\log_2 64 = 6$, jer je $2^6 = 64$;
- $\log_4 2 = -1/2$, jer je $4^{-1/2} = 2$;
- $\log_{1/3} 9 = -2$, jer je $(1/3)^{-2} = 9$;
- $\log_1 x$ nije definisan izraz;
- $\log_b(-3)$ nije definisan izraz.

Osobine logaritama:



Osobine logaritama:

- $\log_b x_1 x_2 = \log_b x_1 + \log_b x_2$ za proizvoljne $x_1, x_2 > 0$;

Osobine logaritama:

- $\log_b x_1 x_2 = \log_b x_1 + \log_b x_2$ za proizvoljne $x_1, x_2 > 0$;
- $\log_b x^c = c \log_b x$, $x > 0, b > 0$,

Osobine logaritama:

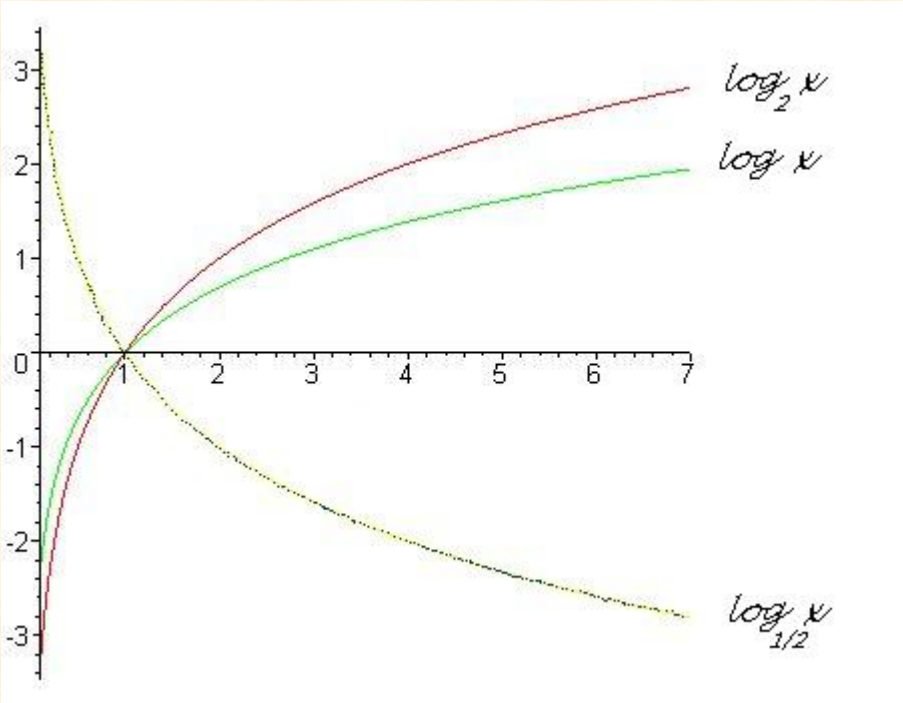
- $\log_b x_1 x_2 = \log_b x_1 + \log_b x_2$ za proizvoljne $x_1, x_2 > 0$;
- $\log_b x^c = c \log_b x$, $x > 0, b > 0$,
- $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$;

Osobine logaritama:

- $\log_b x_1 x_2 = \log_b x_1 + \log_b x_2$ za proizvoljne $x_1, x_2 > 0$;
- $\log_b x^c = c \log_b x$, $x > 0, b > 0$,
- $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$;

Logaritam sa osnovom e zove se **prirodni logaritam** i obeležava se sa log bez oznake osnove:

$$\log x \equiv \ln x \equiv \log_e x.$$



Logaritamska funkcija sa osnovom $b < 1$ je opadajuća, a sa osnovom $b > 1$ rastuća.

Funkcije $x \mapsto e^x$ i $x \mapsto \log x$ su osnovne funkcije u matematici. Pomoću njih se mogu definisati ostale funkcije. Na primer,

$$2^x = e^{x \log 2}; \quad x^2 = e^{2 \log |x|}; \quad \sqrt[3]{x} = e^{(1/3) \log x} \ldots$$

Hiperboličke funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Hiperboličke funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Hiperboličke funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Imaju osobine slične trigonometrijskim funkcijama:

Hiperboličke funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Imaju osobine slične trigonometrijskim funkcijama:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

Hiperboličke funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Imaju osobine slične trigonometrijskim funkcijama:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Hiperboličke funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

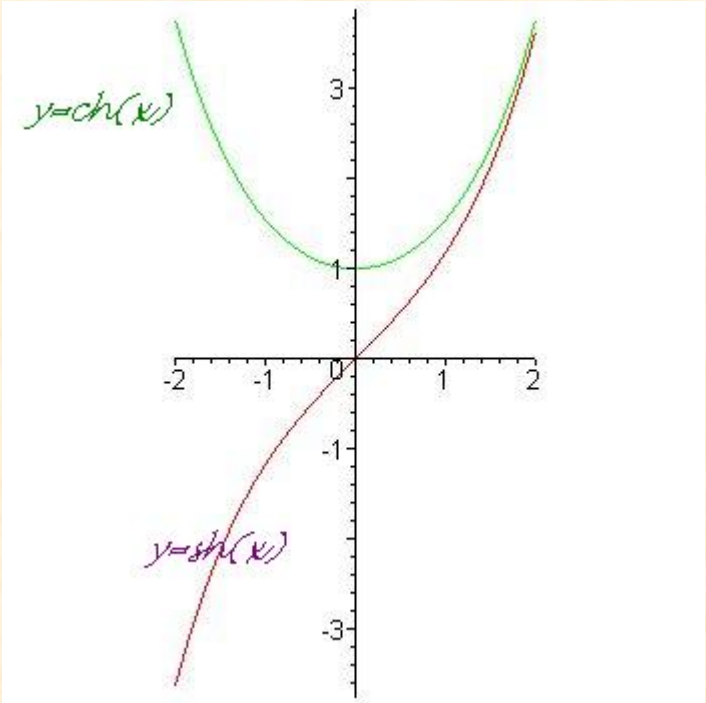
$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Imaju osobine slične trigonometrijskim funkcijama:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Ove funkcije **nisu periodične!**


y=ch(x)
y=sh(x)
3
1
-1
-3
-2
-1
0
1
2

Inverzne funkcije:

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Inverzne funkcije:

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$y = \operatorname{arch} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \geq 1, y \geq 0.$$

Inverzne funkcije:

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$y = \operatorname{arch} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \geq 1, y \geq 0.$$

Ove formule dobijaju se rešavanjem jednačina $\operatorname{sh} y = x$ i $\operatorname{ch} y = x$, smatrajući da je y nepoznato, a x poznato.

Inverzne funkcije:

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$y = \operatorname{arch} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \geq 1, y \geq 0.$$

Ove formule dobijaju se rešavanjem jednačina $\operatorname{sh} y = x$ i $\operatorname{ch} y = x$, smatrajući da je y nepoznato, a x poznato.

Sa funkcijom $\operatorname{arch} x$ imamo istih problema kao i sa $\sqrt{x}$ i oni se rešavaju na isti način.

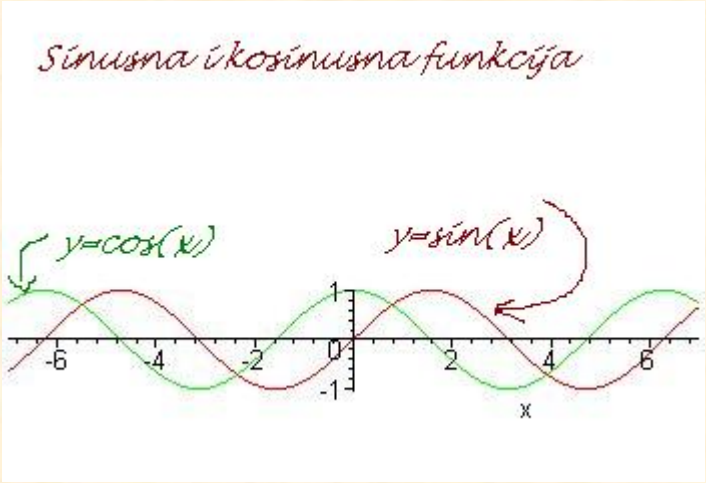
Trigonometrijske funkcije

Funkcije $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$ i $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ mogu se definisati za uglove trougla polazeći od geometrijskih činjenica, a zatim se periodično produžuju na celu realnu osu.

Trigonometrijske funkcije

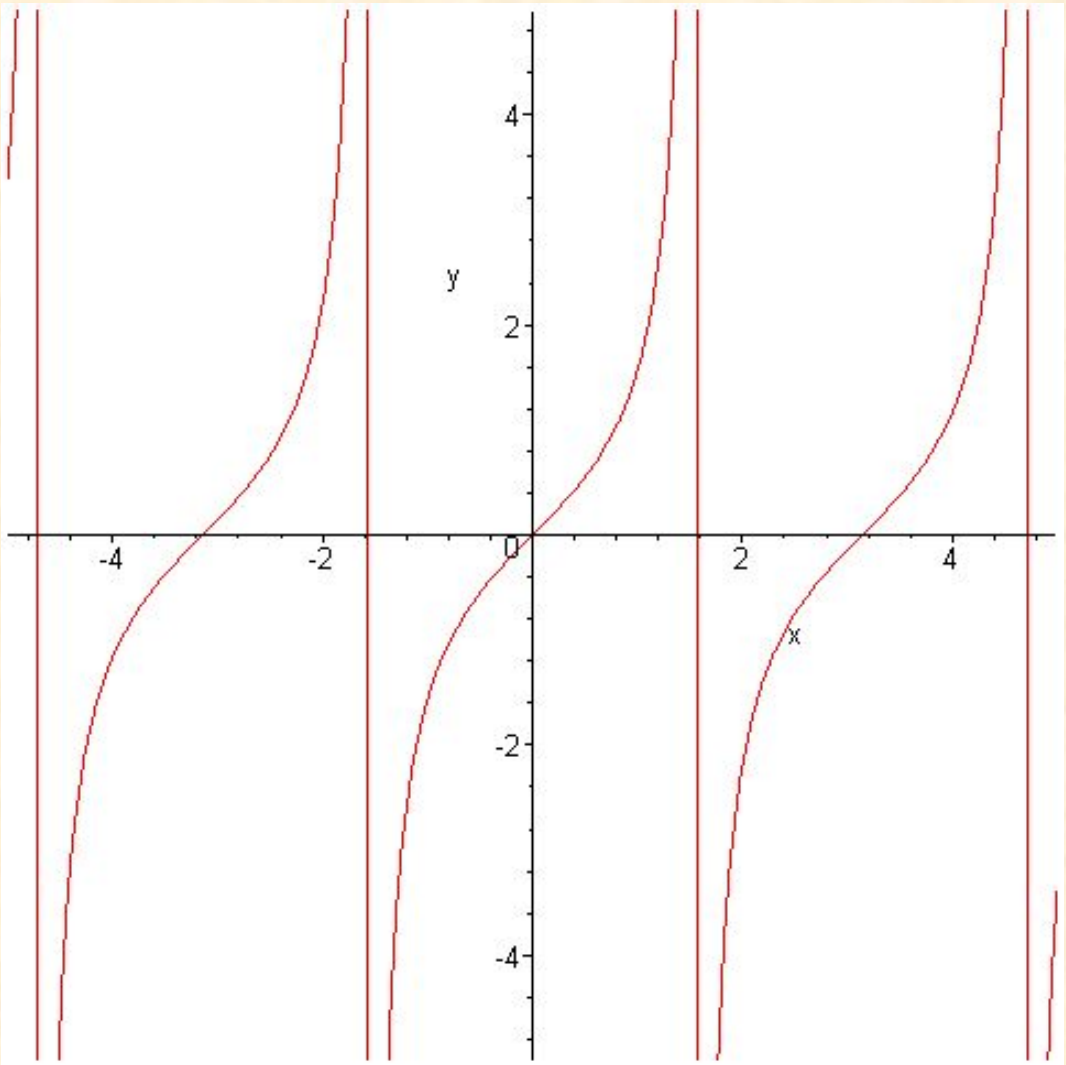
Funkcije $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$ i $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ mogu se definisati za uglove trougla polazeći od geometrijskih činjenica, a zatim se periodično produžuju na celu realnu osu.

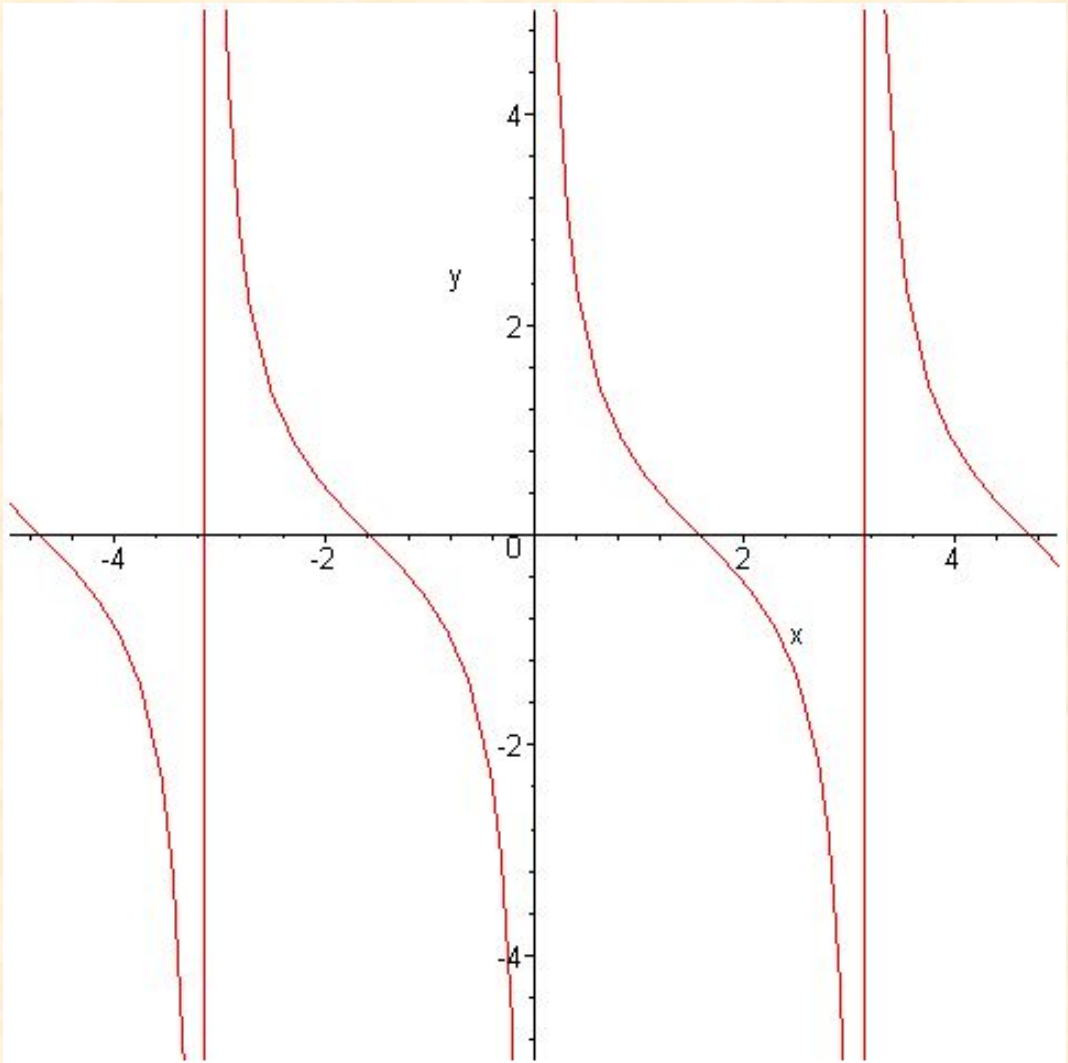
Osnovni (najmanji) period funkcija $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ je 2π, a funkcije $x \mapsto \operatorname{tg} x$ i $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ imaju osnovni period π.



Grafik funkcije $x \mapsto \cos x$ dobija se pomeranjem grafika funkcije $x \mapsto \sin x$, ulevo za $\pi/2$. Drugim rečima,

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

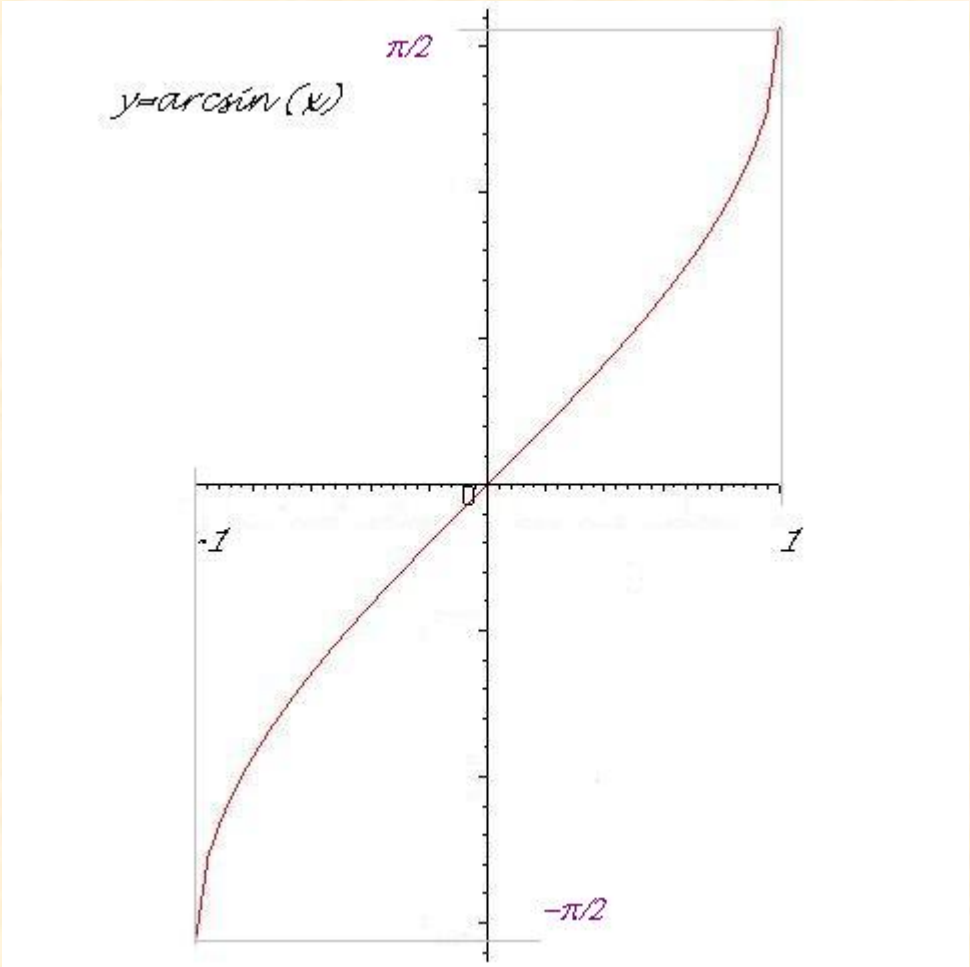

4
y
2
-4
-2
0
2
4
x
-2
-4

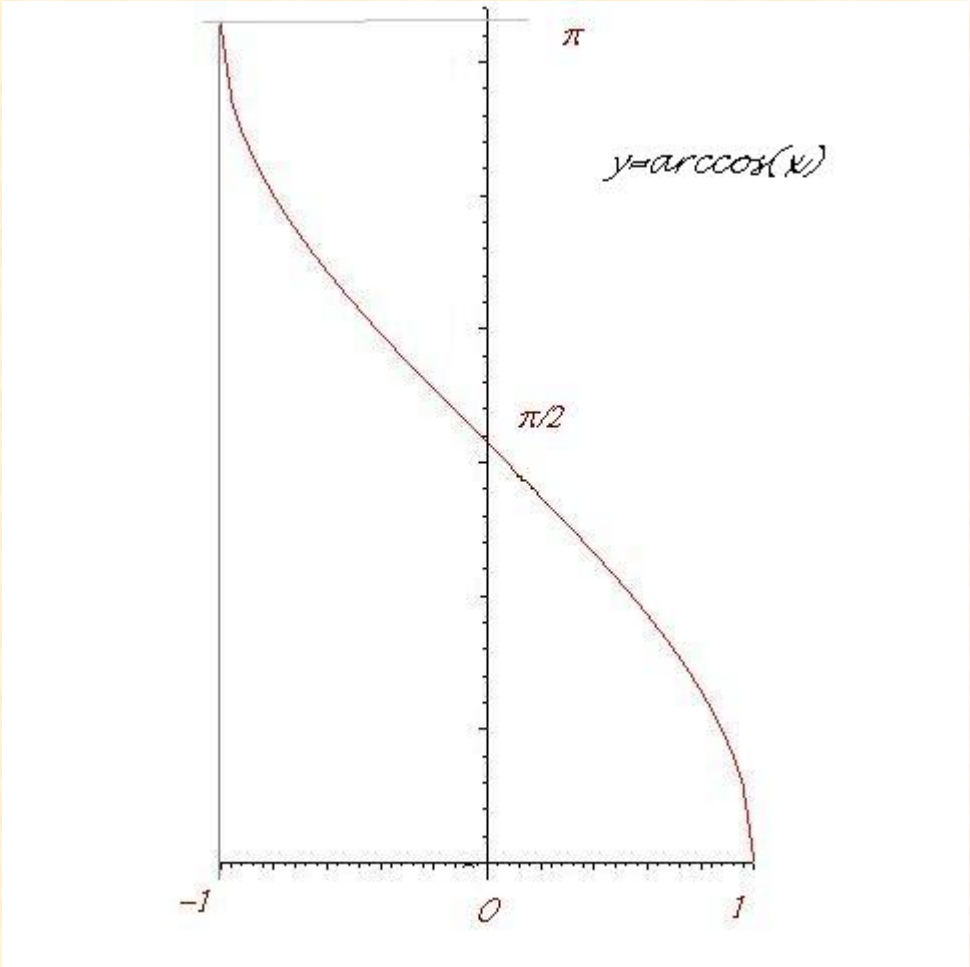

4
y
2
-4
-2
0
2
4
x
-2
-4

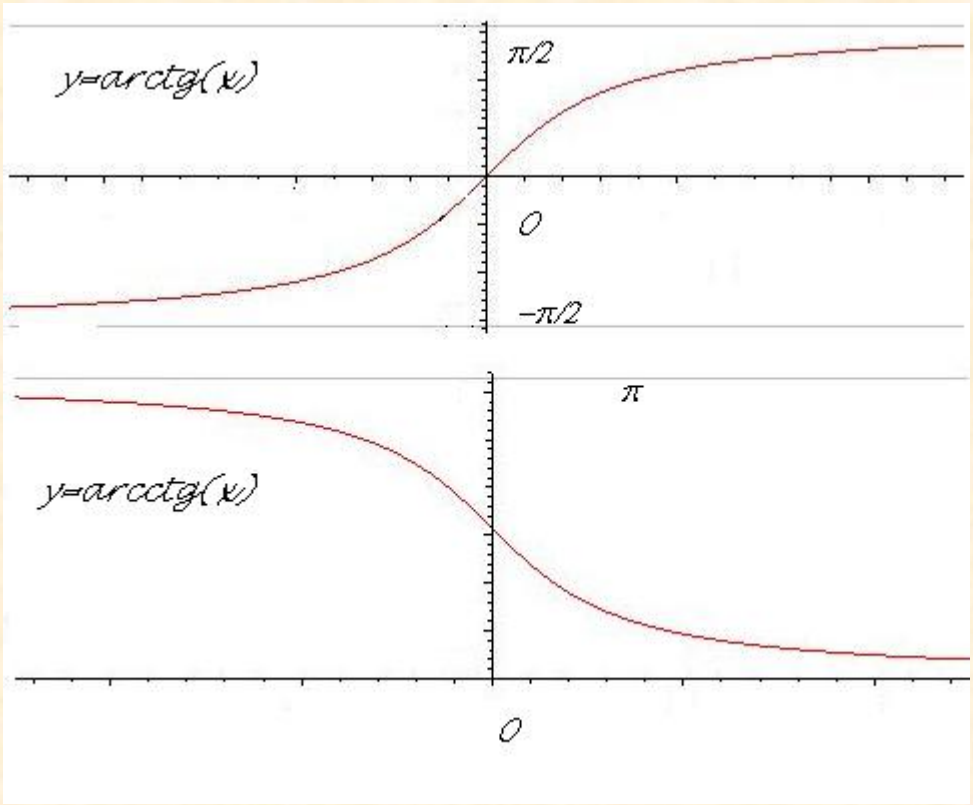
Inverzne trigonometrijske funkcije

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \wedge y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \wedge y \in [0, \pi],$$
$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} x \wedge y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y = \operatorname{arcctg} x \iff x = \operatorname{ctg} x \wedge y \in (0, \pi).$$


π/2
y=arcsin(x)
-1
1
0
−π/2


π
y=arccos(x)
π/2
-1
0
1


y=arctg(x)
π/2
0
−π/2
π
y=arcctg(x)
0

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

- Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

- Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.
- Trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije.

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

- Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.
- Trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije.
- Sve funkcije koje se dobijaju iz navedenih, primenom **konačno mnogo** osnovnih računskih operacija i operacije kompozicije funkcija.

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

- Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.
- Trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije.
- Sve funkcije koje se dobijaju iz navedenih, primenom **konačno mnogo** osnovnih računskih operacija i operacije kompozicije funkcija.

Prve dve navedene klase funkcija nazivaju se **osnovnim elementarnim funkcijama**.

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

- Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.
- Trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije.
- Sve funkcije koje se dobijaju iz navedenih, primenom **konačno mnogo** osnovnih računskih operacija i operacije kompozicije funkcija.

Prve dve navedene klase funkcija nazivaju se **osnovnim elementarnim funkcijama**.

U ovoj definiciji smatra se da je domen funkcija najveći skup na kome su definisane.

Elementarne funkcije

U matematici postoji tradicionalna podela na elementarne i neelementarne funkcije.

Definicija 1 Skup elementarnih funkcija čine:

- Stepena, racionalna, eksponencijalna i logaritamska funkcija.
- Trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije.
- Sve funkcije koje se dobijaju iz navedenih, primenom **konačno mnogo** osnovnih računskih operacija i operacije kompozicije funkcija.

Prve dve navedene klase funkcija nazivaju se **osnovnim elementarnim funkcijama**.

U ovoj definiciji smatra se da je domen funkcija najveći skup na kome su definisane.

Pod **elementarnim funkcijama u širem smislu** podrazumevamo one funkcije koje se od osnovnih elementarnih funkcija, pored osnovnih računskih operacija i kompozicije, dobijaju i restrikcijom domena ili su deo po deo jednake tako dobijenim funkcijama.

Funkcija f definisana sa $f(x) = \sin(e^{\operatorname{arctg}(\log x)})$ je elementarna funkcija, jer se dobija kao kompozicija četiri osnovne elementarne funkcije.

Neka je $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva. Funkcija g definisana sa

$$g(x) = \begin{cases} n, & \text{ako je } x = r_n \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \end{cases}$$

nije elementarna funkcija, jer se ne može dobiti od osnovnih elementarnih funkcija primenom konačno mnogo operacija navedenih u definiciji.

Grafik ove funkcije ne može se nacrtati!

U striktnom smislu, prema definiciji, funkcija definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

nije elementarna funkcija, ali jeste u širem smislu, jer je deo po deo jednaka funkcijama koje se od elementarnih dobijaju restrikcijom domena.

Ne-elementarne funkcije se u matematici koriste isto koliko i elementarne, i izračunavaju se na isti način, primenom numeričkih računarskih metoda.

Ne-elementarne funkcije se u matematici koriste isto koliko i elementarne, i izračunavaju se na isti način, primenom numeričkih računarskih metoda.

Elementarne funkcije imaju samo "prednost" da su nam dobro poznate i da imaju uvek neku interpretaciju (npr. trigonometrijske funkcije imaju geometrijsko tumačenje u trouglu).

Ne-elementarne funkcije se u matematici koriste isto koliko i elementarne, i izračunavaju se na isti način, primenom numeričkih računarskih metoda.

Elementarne funkcije imaju samo "prednost" da su nam dobro poznate i da imaju uvek neku interpretaciju (npr. trigonometrijske funkcije imaju geometrijsko tumačenje u trouglu).

Ne-elementarne funkcije ulaze u Matematiku najčešće preko integrala i redova. Na primer, funkcija

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

nije elementarna funkcija. Dokazi da neka funkcija nije elementarna su veoma teški.

U ovom delu smo naučili:

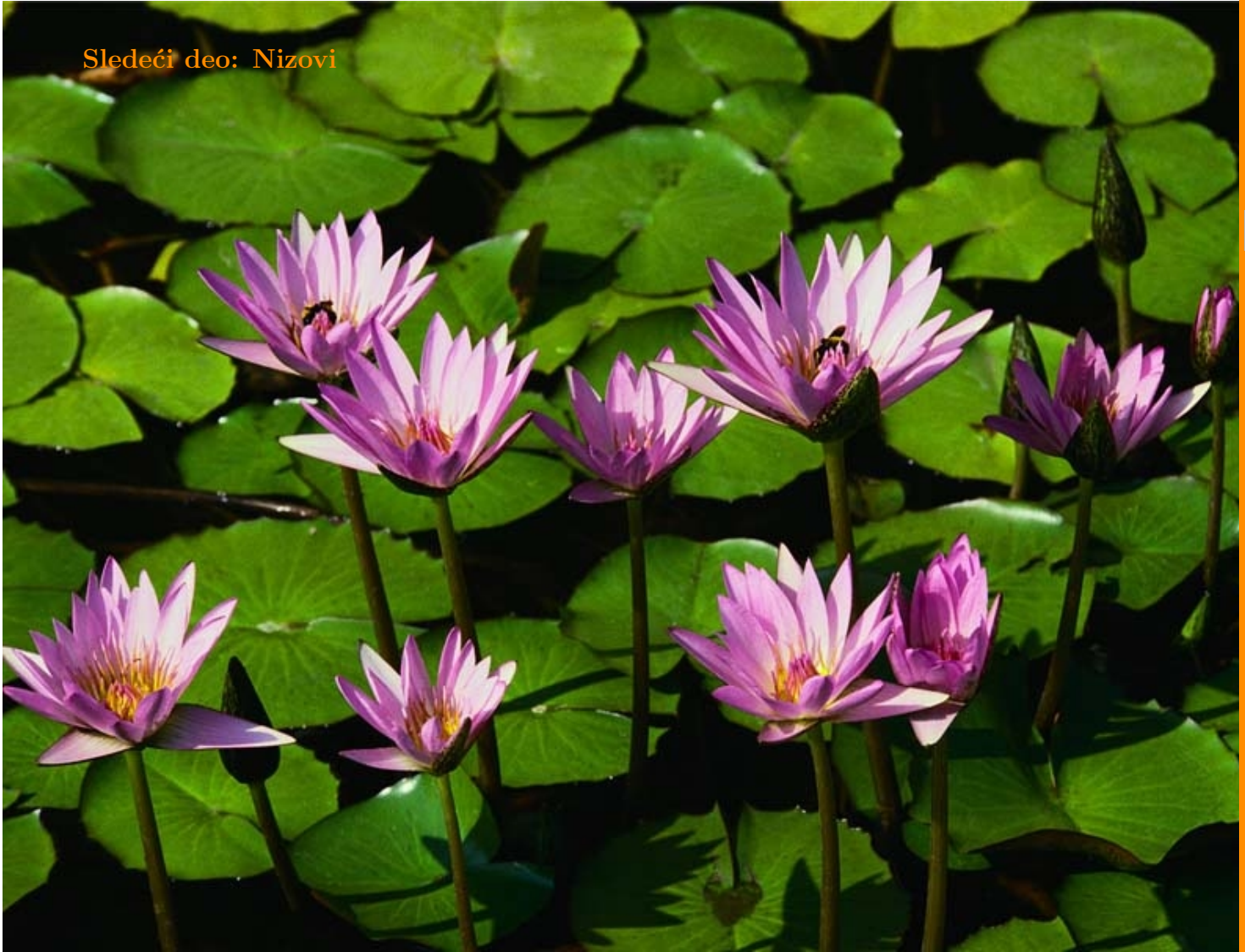
U ovom delu smo naučili:

- Opšte osobine funkcija (domen, grafik, periodičnost, parnost, itd)

U ovom delu smo naučili:

- Opšte osobine funkcija (domen, grafik, periodičnost, parnost, itd)
- Pojam inverzne funkcije i inverzne slike skupa

U ovom delu smo naučili:

- Opšte osobine funkcija (domen, grafik, periodičnost, parnost, itd)
- Pojam inverzne funkcije i inverzne slike skupa
- Osobine važnih funkcija (stepena, eksponencijalna, logaritamska, trigonometrijske funkcije) i njihove grafike
- Pojam elementarne funkcije i koje su funkcije elementarne.

Sledeći deo: Nizovi